ЛИТЕРАТУРА

1. Мубаракзянов Г.М. *Классификация разрешимых алгебр Ли шестого порядка с одним ненильпотентным базисным элементом* // Изв. вузов. Мат. – 1963. – № 4. – С. 104-116.

2. Turkowski P. *Solvable Lie Algebras of dimension six* // J. Math. Phys. –1990. – V. 31. – No 6. – P. 1344-1350.

3. Jacobson N. *Lie Algebras.* – Interscience Publishers, 1962.

4. Хамфрис Дж. *Введение в теорию алгебр Ли и их представлений.* – N. J.: Springer-Verlag, 1972.

Н. В. Шалагинова

Вятский государственный гуманитарный университет,
korshunnv@mail.ru

ТРИ ПУЧКА ДЛЯ ПОЛУКОЛЕЦ НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ

Классическим объектом в математике является кольцо $C(X)$ всех непрерывных функций, определенных на топологическом пространстве X, со значениями в поле действительных чисел $\mathbb{R}$. Его свойства достаточно хорошо изучены (см., например, [6], [7]). С кольцом $C(X)$ тесно связан другой объект — полукольцо $C^+(X)$ всех непрерывных неотрицательных функций, который активно изучается последние 15 лет [2].

Метод пучковых (функциональных) представлений находит применение в различных алгебрах, среди которых выделяются кольца [3] и полукольца [4]. Ниже представлено распространение материала (из [7] о кольцах $C(X)$) на случай полуколец непрерывных функций. Определяются три пучка и выявляются условия их совпадения. Формулируется условие изоморфности соответствующих представлений полукольца $C^+(X)$ в каждом из пучков.

Пусть X — топологическое пространство, $C^+(X)$ — коммутативное полукольцо с единицей всех непрерывных неотрицательных функций на X со значениями в полуполе $\mathbf{R}^+$, для которого кольцо C(X) (см. [6]) является кольцом разностей. Рассмотрим 3 пучка полуколец над X для полукольца $C^+(X)$. Основные понятия теории пучков имеются в [1].

Будем использовать следующие понятия (см. [5]). Если $f \in C(X)$, то $Z(f) = \{x \in X : f(x) = 0\}$ — нуль-множество на X, $\operatorname{coz} f = X \setminus Z(f)$ — конуль-множество, $Z^0(f)$ — внутренность $Z(f)$. Хаусдорфово пространство X называется тихоновским, если для любого замкнутого подмножества B и не принадлежащей ему точки $x \in X$ существует функция $f \in C(X)$, такая, что $B \subseteq Z(f)$ и $f(x) = 1$.

1-й пучок. В полукольце $C^+(X)$ по идеалу

$$O_x = \{f \in C^+(X) : x \in Z^0(f)\},$$

где $x \in X$, рассмотрим конгруэнцию Берна $\rho(O_x)$. Для любой функции $f \in C^+(X)$ ее класс конгруэнтности равен

$$[f]_{\rho(O_x)} = \{g \in C^+(X) : f\rho(O_x)g\} =$$
$$= \{g \in C^+(X) : f = g \text{ на некоторой окрестности точки } x\}.$$

Семейство всех конгруэнций $(\rho(O_x))_{x \in X}$ открыто, так как для любых функций $f,\ g \in C^+(X)$ множество $\{x \in X : f\rho(O_x)g\} = Z^0(f - g)$ открыто в X и порождает факторный пучок θ_X полуколец $C^+(X)/\rho(O_x) = C^+(X)_x$ над X (см. [4]). При этом $\dot{\bigcup\limits_{xinX}} C^+(X)$ служит накрывающим пространством пучка θ_X.

Соответствующее факторное представление $\alpha_1 : C^+(X) \to$ $\to \Gamma(\theta_X)$, где $\Gamma(\theta_X)$ — полукольцо всех глобальных сечений пучка θ_X, индуцировано открытым семейством конгруэнций. Для любых $f,\ g \in C^+(X)$ и $x \in X$ имеем:

$$\alpha_1(f) = \widehat{f},\ \widehat{f}(x) = [f]_{\rho(O_x)} \text{ и } \widehat{f}(x) = \widehat{g}(x) \text{ означает,}$$
$$\text{что } f = g \text{ на некоторой окрестности точки } x.$$

Так как $\bigcap\{\rho(O_x) : x \in X\}$ есть нулевая конгруэнция (отношение равенства) на $C^+(X)$, то представление α_1 точно. Из факторности пучка следует полнота представления α_1. Следовательно, α_1 — изоморфное представление полукольца $C^+(X)$ в пучке θ_X полуколец $C^+(X)_x$, то есть α_1 осуществляет изоморфизм полуколец $C^+(X)$ и $\Gamma(\theta_X)$.

2-й пучок. Пусть $x \in X$. По максимальному идеалу M_x в $C^+(X)$ определим отношение конгруэнтности ρ_{M_x}. Для любых функций $f,\ g \in C^+(X)$:

$$f\rho_{M_x}g \text{ означает, что существует функция } h \in C^+(X),$$
$$\text{для которой } h(x) > 0 \text{ и } fh = gh.$$

Для любой функции $f \in C^+(X)$ ее класс конгруэнтности имеет вид

$$[f]_{\rho_{M_x}} = \{g \in C^+(X) : \exists h \in C^+(X)(h(x) > 0 \wedge fh = gh)\}.$$

Семейство конгруэнций (ρ_{M_x}) по всем $x \in X$ является открытым, так как множество $\{x \in X : f\rho_{M_x}g\} = \cup\{\operatorname{coz} h : fh =$ $= gh\}$ открыто в X и порождает факторный пучок ε_X полуколец $C^+(X)/\rho_{M_x}$ над X.

Соответствующее факторное представление $\alpha_2 : C^+(X) \to$ $\to \Gamma(\varepsilon_X)$ индуцировано открытым семейством конгруэнций. Для любой функции $f \in C^+(X)$ и точки $x \in X$ имеем:

$$\alpha_2(f) = \widehat{f},\ \widehat{f}(x) = [f]_{\rho_{M_x}}.$$

Так как $\bigcap\{\rho_{M_x} : x \in X\}$ есть нулевая конгруэнция, то представление α_2 точно. Из факторности пучка следует полнота представления α_2. Следовательно, α_2 — изоморфное представление полукольца $C^+(X)$ в пучке ε_X полуколец $C^+(X)/\rho_{M_x}$.

Предложение 1. *Если X — тихоновское пространство и $x \in X$, то $\rho(O_x) = \rho_{M_x}$.*

3-й пучок. Пучок ϕ_X полуколец ростков непрерывных $\mathbf{R}^+$-значных функций над X определяется как предпучок полуколец $C^+(A)$ по всем открытым подмножествам A пространства X с гомоморфизмами ограничения. Элементами слоя S_x $(x \in X)$ пучка ϕ_X служат ростки непрерывных функций, каждый из которых представляет собой класс всевозможных непрерывных неотрицательных функций, определенных на окрестностях точки $x \in X$ и равных на подходящих "малых" окрестностях x. При этом полукольцо $C^+(X)$ канонически отождествляется с подполукольцом глобальных сечений пучка ϕ_X полукольца $\Gamma(\phi_X)$.

Гомоморфизм $\widehat{}: f \to \widehat{f}$, где $\widehat{f} \in \Gamma(\phi_X)$ и $\widehat{f}(x) = [f]_{\rho(O_x)} \in \in S_x$, инъективен, поскольку для любых различных функций $f, g \in C^+(X)$ найдется точка x_0, для которой $f(x_0) \neq g(x_0)$, то есть $\widehat{f}(x_0) \neq \widehat{g}(x_0)$. Таким образом, $\widehat{}: C^+(X) \to \Gamma(\phi_X)$ — изоморфное вложение.

Лемма. *Пусть X — тихоновское пространство. Тогда для произвольных точки x_0 и несодержащего ее замкнутого подмножества B найдутся непрерывная на X функция f со значениями в единичном отрезке $[0,1]$ и окрестность U точки x_0, такие, что $f(U) = \{1\}$ и $f(B) = \{0\}$.*

Для произвольной точки x тихоновского пространства X найдется открытое множество A, содержащее точку x, такое, что $s(x) = [h]_{\rho(O_x)}$, где $h \in C^+(A)$.

Поэтому получаем следующее утверждение.

Предложение 2. *Для любого тихоновского пространства X пучок ϕ_X является факторным и соответствующее представление изоморфное.*

Однако обратное утверждение не верно. Примером такого пространства является антидискретное пространство X мощности больше 1. Пучок полуколец над таким пространством является факторным, так как любое отображение из X в произвольное топологическое пространство непрерывно. Но антидискретное пространство не будет тихоновским, так как не является T_1-пространством.

Предложение 3. *Пучок ϕ_X совпадает с пучком θ_X тогда и только тогда, когда ϕ_X — факторный пучок.*

Предложение 4. *Функциональные представления* α_1 и α_2 *полукольца $C^+(X)$ совпадают и являются изоморфными представлениями.*

Предложение 5. *Если X — тихоновское пространство, то пучки θ_X, ε_X, ϕ_X совпадают.*

ЛИТЕРАТУРА

1. Бредон Г. *Теория пучков / Пер. с англ. А. Ю. Воловикова; Под ред. Е. Г. Скляренко.* – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1988. – 312 с.

2. Варанкина В. И., Вечтомов Е. М., Семенова И. А. *Полукольца непрерывных неотрицательных функций: делимость, идеалы, конгруэнции* // Фундам. и прикл. математика. – 1998. – Т. 4. – № 2. – С. 493-510.

3. Вечтомов Е. М. *Функциональные представления колец.* – М.: МПГУ, 1993. – 190 с.

4. Чермных В. В. *Полукольца: учебное пособие.* – Киров: ВятГГУ, 1997. – 131 с.

5. Энгелькинг Р. *Общая топология.* – М.: Мир., 1986. – 451 с.

6. Gillman L., Jerison M. *Rings of continuous functions.* – N. J.: Springer-Verlag., 1976. – 300 p.

7. Vechtomov E. M. *Rings of continuous functions with values in topologicals division ring* // J. Math. Sciences. – 1996. – V. 78. – No 6. – P. 702-753.

Г. Р. Юнусова

Самарский государственный архитектурно-строительный университет, ggg-ggg@mail.ru

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА С НЕЛОКАЛЬНЫМ ГРАНИЧНЫМ УСЛОВИЕМ

Рассмотрим уравнение

$$Lu = \begin{cases} u_t - u_{xx} = 0, & t > 0, \\ u_{tt} - u_{xx} = 0, & t < 0, \end{cases} \tag{1}$$

в прямоугольной области $D = \{(x,t)|\ 0 < x < 1, -\alpha < t < \beta\}$, где $\alpha > 0,\ \beta > 0$ — заданные действительные числа.

Нелокальная задача. *Найти в области D функцию $u(x,t)$, удовлетворяющую условиям:*

$$u(x,t) \in C^1(\overline{D}) \cap C^2(D_-) \cap C^{2,1}_{x,t}(D_+); \tag{2}$$

$$Lu \equiv 0, \quad (x,t) \in D_+ \cup D_-; \tag{3}$$

$$u(0,t) = u(1,t) = 0,\ -\alpha \leqslant t \leqslant \beta; \tag{4}$$